CONCURSUL DE MATEMATICĂ

„SPERANŢE RÂMNICENE”

Ediţia a XII-a,Râmnicu Sărat,10 mai 2014

Prezentare de Costică Ambrinoc

Filiala Râmnicu Sărat a S.S.M.R. a organizat,la data de 10 mai 2014, concursul interjudeţean de matematică „Speranţe Râmnicene”, ediţia a XII-a,care se adresează elevilor din clasele IV-XII. Gazda concursului a fost Şcoala nr.1 din Râmnicu Sărat,judeţul Buzău.

La această ediţie au participat peste 250 elevi din unităţile şcolare ale judeţelor Buzău, Galaţi, Vaslui. Subiectele au fost selectate de o comisie formată din: prof.dr.Marcel Ţena, prof. Constantin Rusu, prof. Costică Ambrinoc, prof. Mihai Neagu.

Fondurile pentru premierea elevilor au fost asigurate de Filiala Rm. Sărat a S.S.M.R. de A.T.C.E. Speranţa Râmniceană şi de către Primaria Podgoria, judeţul Buzău.

Premiile au fost înmânate de domnul prof.dr. Marcel Ţena, membru de onoare al Societăţii de Ştiinţe Matematice din România, filiala Rm. Sărat şi de către domnul Mircea Trifu, secretar general al Societăţii de Ştiinţe Matematice din România.

În continuare prezentăm subiectele propuse şi lista premianţilor.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XII-a
10 mai 2014

Clasa a IV-a

Problema 1

Câte numere de patru cifre au suma dintre cifra zecilor şi cifra unităţilor egală cu 7 ?

G.M. 3/2014, Ion Ciucu

Problema 2

Mircea are 10 ani. Ionel îi spune lui Mircea:

„Valoarea lui a din egalitatea $\{4\times[(13\times a-36):2+20]-310\}:2=5$ este vârsta mea”. Care dintre cei doi băieţi are vârsta mai mare ?

Problema 3

Într-o cutie sunt bile de trei culori: roşii, galbene şi negre. Numai 54 din ele nu sunt negre şi numai 63 din ele nu sunt roşii. Numărul bilelor roşii este de două ori mai mic decât al celor negre. Care este numărul minim de bile ce trebuie extras pentru a fi siguri că avem o bilă galbenă ?

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XII-a
10 mai 2014
Clasa a V-a

Problema 1

Arătaţi că numerele $\overline{\underbrace{444...44}_{555\,cifre}}$ şi $\overline{\underbrace{555...55}_{444\,cifre}}$ nu sunt pătrate perfecte.

Marin Simion, profesor, Rm. Sărat

Problema 2

Există numere $\overline{abcd}$ cu proprietatea că :
$\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=2014$?

Constantin Apostol, Rm. Sărat

Problema 3

Ana şi Barbu desenează pe câte o foaie de hârtie grupuri de steluţe.Ana desenează o steluţă, apoi trei steluţe, apoi 5 steluţe şi aşa mai departe, de fiecare dată un număr impar. Barbu desenează două steluţe, apoi 4 steluţe, apoi 6 steluţe, şi aşa mai departe, de fiecare dată un număr par.
Arătaţi că, indiferent de momentul la care se vor opri din desenat cei doi copii, numărul total de steluţe desenate de Ana, nu poate fi egal cu numărul de steluţe desenat de Barbu.

E: 14465, G.M. 3/2013

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XII-a
10 mai 2014
Clasa a VI-a

Problema 1

Determinaţi toate proporţiile în care unul dintre mezi este 257,5 iar ceilalţi termeni sunt numere prime.

Marin Simion, Rm.Sărat

Problema 2

În triunghiul ABC, cu $(AB) \equiv (AC)$ şi $m(\angle A) = 100^0$, considerăm punctele $M \in (BC)$ şi $N \in (AB)$, astfel încât $(BM) \equiv (BA)$ şi $(BN) \equiv (CM)$.
Determinaţi $m(\angle BNM)$

Constantin Apostol, Rm.Sărat

Problema 3

Locuitorii unei comune, formată din două sate, sunt chemaţi la vot. Procentul de participare la vot al celor două aşezări este de 60% respectiv 75%. Să se afle cât la sută reprezintă locuitorii satului cu populaţia mai mică din locuitorii satului cu populaţia mai mare, dacă procentul de participare la nivelul comunei este de 69%.

E: 14439 , G. M.1 / 2013, Cosmin Manea şi Petrică Dragoş,Piteşti

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XII-a
10 mai 2014
Clasa a VII-a

Problema 1

Să se determine cel mai mic $a \in \mathrm{N}$ astfel încât numărul:

$$A = 2014^x(2014^x+1)(2014^x+2)(2014^x+3)+a$$

să fie pătrat perfect oricare ar fi $x \in N$.

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Problema 2

Determinaţi numerele $n \in N^*$ cu proprietatea că:

$$\sqrt{\underbrace{577...76}_{nori}} \in N$$

Mihai Neagu, Rm. Sărat

Problema 3

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D şi E astfel încât $BD = DE = EC$. Mediana $BB'(B' \in AC)$ intersectează pe AD în M, iar mediana $CC'(C' \in AB)$, intersectează pe AE în N. Arătaţi că:

a) $BMNC$ este trapez;

b) $MN = \frac{1}{4}BC$

E: 14369 , G.M.6-7-8 / 2012, Luca Tuţă, Buzău

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XII-a
10 mai 2014
Clasa a VIII-a

Problema 1

Determinaţi toate perechile (x, y) de numere întregi astfel încât:

$x^2y^2 - x^2 - xy - x - y^2 + y + 2 = 0$.

D.M. Bătineţu- Giurgiu, Bucureşti
Neculai Stanciu, Buzău

Problema 2

Fie $1,3,5,...,2n-1$ şirul primelor n numere naturale impare. Să se arate că nu există printre acestea un număr k astfel încât suma numerelor mai mici sau egale cu k să fie egala cu suma numerelor mai mari decât k.

Dragoş Lăzărescu, Rm. Sărat

Problema 3

În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12\sqrt{3}$ cm, $BC = 12$ cm şi $AA' = 18$ cm, se consideră pe muchia $[A'B']$ punctul N, astfel încât $A'N = 3 \cdot B'N$ şi $P \in (AA')$. Determinaţi lungimea segmentului $[AP]$ astfel încât, pentru orice punct M de pe muchia $[BC]$, triunghiul MNP să fie dreptunghic în N.

E: 14603 , G.M.1/ 2014, Damian Marinescu, Târgovişte

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XII-a
10 mai 2014
Clasa a IX-a

Problema 1

Să se determine funcţia $f : N^* \to N^*$ ştiind că:

$1^2 f(1) + 2^2 f(2) + ... + n^2 f(n) = \frac{n^2 (f(n)+1)^2}{4}$ oricare ar fi $n \in N^*$.

E: 26831, G. M. 11 / 2013, Aurel Doboşan, Lugoj

Problema 2

Arătaţi că dacă m_a, m_g, m_h, m_p, sunt mediile aritmetică, geometrică, armonică şi pătratică a numerelor 1 şi $x > 0$ atunci au loc inegalităţile:

a) $m_a + m_g < m_h + m_p$

b) $\frac{m_g + m_p}{2} < m_a$

D.M. Bătineţu-Giurgiu,Bucureşti
Neculai Stanciu,Buzău

Problema 3

Se dă patrulaterul convex $ABCD$ într-un sistem ortogonal de axe cu originea în O. Considerăm poligonul convex $A_1B_1C_1D_1$ ale cărui vârfuri au vectorii de poziţie egali respectiv cu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.
Să se afle raportul ariilor patrulaterelor $A_1B_1C_1D_1$ şi $ABCD$.

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XII-a
10 mai 2014
Clasa a X-a

Problema 1

Să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x$$

Costică Ambrinoc, Rm. Sărat

Problema 2

Fie $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ distincte două câte două, astfel încât $|z_1|=|z_2|=|z_3|$.
Să se arate că z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral dacă şi numai dacă: $z_1|z_2-z_3|+z_2|z_3-z_1|+z_3|z_1-z_2|=0$

Mihai Neagu, Rm.Sărat

Problema 3

Fie $a,b \in (0,\infty)-\{1\}$ astfel încât $a+b\neq 1$, şi funcţiile $f,g:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\log_a x+\log_b x, g(x)=\log_{a+b} x$. Să se arate că $f(x)=g(x)\forall x\in(0,\infty)$ dacă şi numai dacă $f(a)=g(a)$.

Prelucrare G.M. 1/2012

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se noteaza cu 7 puncte.

SPERANŢE RÂMNICENE –ediţia a XII-a
10 mai 2014
Clasa a XI-a

Problema 1

Se consideră matricile: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

a) Să se calculeze $\det(A^{2014}+B^{2014})$

b) Dacă $C=A+B$, calculaţi C^n

Dragoş Lăzărescu, Rm. Sărat

Problema 2

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale cu $x_1=2$ şi $\ln\sqrt{x_{n+1}}=\frac{x_n-1}{x_n+1}$, $\forall n\geq 1$.

Să se arate că şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent şi să se calculeze limita sa.

Ovidiu Ţâţan, Rm. Sărat

Problema 3

Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln(\sin x)+e^{\frac{1}{x}})$

E:25529, G.M.4/2006, Sebastian Lesnic, Bucureşti

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

SPERANTE RÂMNICENE EDIŢIA a XII-a
10 mai 2014
Clasa a XII-a

Problema 1

Calculaţi

$$\int \frac{e^{2x}+(2e^x+1)\sin x+2e^x+\sin^2 x+\cos x}{e^x+\sin x}\,dx, \quad \text{unde } x\in R.$$

Ion Răduţă, Rm.Sărat

Problema 2

Se consideră funcţia $f:(0,\infty)\to R$, $f(x)=\ln(1+\sqrt{1+x^2})-\ln x-\frac{1}{x}$

Să se arate că:

1) $x\geq e\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$
2) dacă funcţia $F:(0,\infty)\to R$ este o primitivă a funcţiei f, atunci
$$F(\sqrt{10}^e)>F(e^{\sqrt{10}})$$

Constantin Rusu, Rm. Sărat

Problema 3

Fie p un număr prim iar a un element fixat în corpul Z_p. Să se rezolve în acest corp ecuaţia $x^p=a$.

Marcel Ţena, Bucureşti

Timp de lucru 2 ore.Fiecare problema se notează cu 7 puncte.

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a IV-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	ENACHE IULIA	Scoala 1 Rm Sarat	DASCALU VIORICA		100	21	I	
2	GRIGORE VLAD	Scoala 1 Rm Sarat	MORARU ILINCA		100	21	I	
3	ENACHE VLADUT	Scoala 1 Rm Sarat	DASCALU VIORICA		80	20	II	
4	BRATOSIN ALEXANDRU	Scoala 1 Rm Sarat	IGNAT ALEXANDRINA		80	19	II	
5	NISTOROIU DARIA	Scoala 1 Rm Sarat	DASCALU VIORICA		30	17	Mențiune	
6	OPINCARU DENISA	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian		30	16	Mențiune	
7	RUSIN CRINA	Scoala V. Cristoforeanu	DUMBRAVESCU RODICA		30	16	Mențiune	
8	VASILE MIREL	Scoala 1 Rm Sarat	MORARU ILINCA			13		
9	TAMAN MARINA	Scoala 1 Rm Sarat	IGNAT ALEXANDRINA			12		
10	NEGRARU CELESTIN	Scoala 1 Rm Sarat	FRATILA EMA			11		
11	PURDEL RICHARD	Scoala V. Cristoforeanu	ROSCA FLORICA			11		
12	VLAD CRISTIANA	Scoala 1 Rm Sarat	DASCALU VIORICA			11		
13	SUNAL ALEXANDRU	Scoala V. Cristoforeanu	DUMBRAVESCU RODICA			10		
14	CHIRITA RAZVAN	Scoala 1 Rm Sarat	MORARU ILINCA			9		
15	MARGINEANU LIVIU	Scoala V. Cristoforeanu	ROSCA FLORICA			9		
16	TUDOR RARES	Scoala 1 Rm Sarat	FRATILA EMA			9		
17	DRAGOMIR GEORGE	Scoala 1 Rm Sarat	FRATILA EMA			8		
18	DRAGU ALESSANDRO	Scoala V. Cristoforeanu	DUMBRAVESCU RODICA			8		
19	DRAGULIN DENISA	Scoala V. Cristoforeanu	DUMBRAVESCU RODICA			8		
20	ILIE MIRUNA	Scoala V. Cristoforeanu	DUMBRAVESCU RODICA			8		
21	MIRICA LUCIAN	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian			8		
22	SORESCU ALEXANDRU	Scoala 1 Rm Sarat	FRATILA EMA			8		
23	STAN IOANA	Scoala V. Cristoforeanu	DUMBRAVESCU RODICA			8		
24	LIMISCA ALEXANDRU	Scoala V. Cristoforeanu	ROSCA FLORICA			7		
25	STANCIU MIHNEA	Scoala V. Cristoforeanu	ANTON FLORICA/DRAGU IONELIA			6		
26	POPA CATALIN	Scoala V. Cristoforeanu	ANTON FLORICA/DRAGU IONELIA			5		
27	MACRINEANU BIANCA	Scoala 1 Rm Sarat	IGNAT ALEXANDRINA			4		
28	PETREA ALEXANDRU	Scoala V. Cristoforeanu	ROSCA FLORICA			4		
29	BERCAN ALEXANDRA	Scoala V. Cristoforeanu	DUMBRAVESCU RODICA			3		
30	HARBUZ IONUT	Scoala V. Cristoforeanu	ANTON FLORICA/DRAGU IONELIA			3		
31	MUNTEANU RADU	Scoala V. Cristoforeanu	ANTON FLORICA/DRAGU IONELIA			3		
32	IALINA DECEBAL	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian			2		
33	PANAIT IOANA-MADALINA	Scoala V. Cristoforeanu	ROSCA FLORICA			2		
34	POPA ALINA	Scoala 1 Rm Sarat	POPA VIORICA			2		
35	CARAMIDA ANDREEA	Scoala V. Cristoforeanu	DUMBRAVESCU RODICA			1		
36	DEDIU LARISA	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian			1		
37	Dinu Bianca	Scoala 28 Galati	Olariu Liliana			0		
38	DONE CATALIN	Scoala 1 Rm Sarat	IGNAT ALEXANDRINA			0		
39	IONICA GEORGE	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian			abs		
40	Iordache Răzvan	Șc. Emil Palade Buzău	Oancea Elena			abs		
41	JOSAN ALEXANDRA	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian			abs		
42	LUCA DANIEL	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian			abs		
43	PAUN CRISTINA	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian			abs		
44	UNGUREANU DANIEL	Scoala V. Cristoforeanu	Tataranu Marian			abs		

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a V-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	Chiriac Ella Ana-Maria	CN V.Alecsandri Galati	Grigore Mirela		100	18	I	
2	Grigoraș Tudor	CN V.Alecsandri Galati	Grigore Mirela		80	15	II	
3	Tătaru Mihai Radu	CNVA Galati	Grigore Mirela		80	12	II	
4	Bejan Alexandra	CN V.Alecsandri Galati	Grigore Mirela		50	10	III	
5	Neagu Mihnea	CN V.Alecsandri Galati	Grigore Mirela		50	10	III	
6	CIAUSU ANA MARIA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	FLOREA RAZVAN			6		
7	Mircea Bianca	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel			6		
8	Nanu Ana Maria	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel			6		
9	Onciu Diana	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel			6		
10	Sirbu Dragos	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel			6		
11	MIHAIL RARES	CN V.Alecsandri Galati				6		
12	MODIGA MIRUNA MIHAELA	Sc. G. Tutoveanu Barlad	Rotaru Marcel			6		
13	CONSTANTINESCU ADELINA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	FLOREA RAZVAN			5		
14	Gherghescu Andrei	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel			5		
15	Anghel Sergiu	CNAV	Lazarescu Dragos			4		
16	Untea Robert	CNAV	Lazarescu Dragos			4		
17	Rus Iulia	Scoala 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			3		
18	Vlad Alexandru	Scoala nr 2 Rm. Sarat	Marin Marian			3		
19	Aliman Catalin	Scoala 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			1		
20	ANDONE ANDRA	Scoala Alexandru Odobescu Buda	MINZALA CORINA			1		
21	Asanache Alexandru	CNAV	Lazarescu Dragos			1		
22	AVRAM SEBASTIAN GEORGIAN	Scoala Alexandru Odobescu Buda	MINZALA CORINA			1		
23	BRICEAG CRISTINA	Sc. V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			1		
24	Chirita Teodora	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel			1		
25	Coserea Ionut	Scoala 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			1		
26	CRINTEA BIANCA	Sc. V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			1		
27	CRISTODOR ANDRA	Sc. V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			1		
28	DOGĂRESCU MĂDĂLINA	Scoala Alexandru Odobescu Buda	MINZALA CORINA			1		
29	GHILIFTOIU MARIA	Sc. V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			1		
30	IOSEF MARIUCA	Sc. V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			1		
31	JEGU MIRUNA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	FLOREA RAZVAN			1		
32	PAPUC MARA DALINA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	FLOREA RAZVAN			1		
33	Popa Irina	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel			1		
34	SAVA ELENA	Sc. V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			1		
35	Solomon Alexandru	CNAV	Lazarescu Dragos			1		
36	TUDOSE DANIEL IONUȚ	Scoala Alexandru Odobescu Buda	MINZALA CORINA			1		
37	TUSINSCHI BIANCA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	FLOREA RAZVAN			1		
38	Ciobanu Adrian	CN V.Alecsandri Galati	Grigore Mirela			ABSENT		
39	Ene Victor	Scoala nr 2 Rm. Sarat	Marin Marian			ABSENT		
40	LAZAR IONUT	Scoala nr 1 Rm. Sarat	FLOREA RAZVAN			ABSENT		
41	Mesca Miruna	Scoala 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			ABSENT		
42	NEGRARU CELESTIN	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel			ABSENT		
43	RADU ALEXANDRA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	ROSU VALERICA			ABSENT		
44	Simion Razvan	Scoala 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			ABSENT		

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a VI-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	STANCIU VLADUT	Scoala 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA		100	21	I	
2	MIHAI RALUCA	Scoala 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA		80	20	II	
3	STEFAN ALEXANDRU	Scoala 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA		80	20	II	
4	Avram Miruna	CNVA Galati	Tătaru Radu Marius		50	19	III	
5	Kull man Robert	Sc. Gimnaziala nr.11 Bz	Marin Grigori		50	19	III	
6	CARP BOGDAN	Scoala 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA		30	18	Menţiune	
7	Lefter Ioan Cristian	CNVA Galati	Tătaru Radu Marius		30	18	Menţiune	
8	Pripoaie Razvan	CNVA Galati	Tătaru Radu Marius		30	18	Menţiune	
9	Borcan Aniela	Sc. 11 Buzau				17		
10	Ragea Eduard Florin	CNVA Galati				16		
11	Plesa Ana	Sc. Gimnaziala nr.11 Bz	Marin Grigori			15		
12	Tatan Miruna -Maria	CNAV	Neagu Mihai			15		
13	Dragomir Andrei	CNVA Galati	Tătaru Radu Marius			14		
14	Mortu Adrian	Sc. Gimnaziala nr.11 Bz	Marin Grigori			14		
15	Potirniche Florina	Sc. Gimnaziala nr.11 Bz	Marin Grigori			14		
16	Cebic Georgiana	Sc. Gimnaziala nr.11 Bz	Marin Grigori			13		
17	Manolache Laurentiu	CNVA Galati	Tătaru Radu Marius			8		
18	PAIS ANDRA	Scoala 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			8		
19	PANAIT CASIAN	Scoala 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			8		
20	Proca Andreea Dana	CNAV	Neagu Mihai			8		
21	BRUTARU ANDREI	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela			7		
22	DRAGU PATRIZIA	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela			3		
23	NICA DIANA	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela			3		
24	Banaurs Madalin Theodor	CNAV	Neagu Mihai			2		
25	Mihai Alexandru Catalin	CNAV	Neagu Mihai			2		
26	Panturu Adelina	Scoala 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			1		
27	SIRBU IONUT	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela			1		
28	ZANE LIVIA	Scoala 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			1		
29	Bocu Andreea	Scoala Al. Odobescu	Minzala Corina			0		
30	Andrei Cristian Marian	CNAV	Neagu Mihai					
31	COMAN MATEI	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela					
32	Elisei Maria	CNVA Galati	Tătaru Radu Marius					
33	NEGRARU CELESTIN	CNVA Galati	Tătaru Radu Marius					
34	Teodor Maria	CNVA Galati	Tătaru Radu Marius					
35	VOICU MADALIN	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela					

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA
FILIALA RÂMNICU SĂRAT
FONDATĂ ÎN 1910

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a VII-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	Lazarescu Vlad Mihai	CNAV	Lazarescu Dragos		100	9	I	
2	Cibotaru Matei	Sc.G. Tutoveanu, Bârlad	Rotaru Marcel		80	7	II	
3	LUNGU STEFANIA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			5		
4	Juganaru Gabriela	CNAV	Lazarescu Dragos			4		
5	CONSTANTINESCU ANDREEA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			3		
6	Poenaru Marina	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			3		
7	SAVA DANIEL	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			3		
8	Afrasanei Vlad	Liceul Stefan cel Mare	Tănase Georgeta			2		
9	Andrei Maria Daniela	Scoala nr 1 Rm. Sarat				2		
10	DRAGNEA EDINA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			2		
11	DUMITRU ANDREEA	Sc.V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			2		
12	Tanase Viorel Sorin	CNAV	Lazarescu Dragos			2		
13	Valcu Bogdan Florin	CNAV	Lazarescu Dragos			2		
14	BARBU CRISTINA	Sc.V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			1		
15	Dumitrascu Cosmin Dragos	CNAV	Lazarescu Dragos			1		
16	Popa Rebeca	Scoala nr 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			1		
17	RADU LEONARD	Scoala Alexandru Odobescu Buda	MINZALA CORINA			1		
18	RADU ROXANA	Scoala Alexandru Odobescu Buda	MINZALA CORINA			1		
19	Andrei Viorel Alexandru	CNAV	Lazarescu Dragos			0		
20	Bercea Bogdan Petre	CNAV	Lazarescu Dragos			0		
21	Enache Andrei	Scoala nr 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			0		
22	ISOPENCU DRAGOS	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA			0		
23	LAPTOIU ANDREEA	Sc.V. Cristoforeanu	CRISTEA MIRELA			0		
24	MIROIU VALENTINA	Scoala Alexandru Odobescu Buda	MINZALA CORINA			0		
25	Nan Carmen	Scoala nr 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			0		
26	NECȘANU ROBERTA ELENA	Scoala Alexandru Odobescu Buda	MINZALA CORINA			0		
27	Parvu Paul	Liceul Stefan cel Mare	Tănase Georgeta			0		
28	Petrache Alexandra	Liceul Stefan cel Mare	Tănase Georgeta			0		
29	Vasile Andrei	Scoala nr 6 Rm. Sarat	Ghiuru Cristina			0		
30	COMAN CAMELIA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA					
31	Comanescu Vlad	Sc.G. Tutoveanu, Bârlad	Rotaru Marcel					
32	Dinu Iulia	Scoala 28 Galati	Batinetu Petre					
33	Neculaiasa Ecaterina	Liceul Stefan cel Mare	Tănase Georgeta					
34	NEGRARU CELESTIN	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA					
35	PETREA ANDREI	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA					
36	ROSSI GIOVANNA	Scoala nr 1 Rm. Sarat	APOSTOL MARIEANA					
37	Rotaru Oana	Sc.G. Tutoveanu, Bârlad	Rotaru Marcel					

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

SOCIETATEA DE ȘTIINȚE MATEMATICE DIN ROMÂNIA FILIALA RÂMNICU SĂRAT FONDATĂ ÎN 1910

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a VIII-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	Odobeșteanu Alexandru	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel		100	15	I	
2	Angheluță Raluca	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel		80	14	II	
3	Huhulia Diana	Sc.G.Tutoveanu Bârlad	Rotaru Marcel		50	11	III	
4	Pavel Silviu – Cristian	Sc.V. Cristoforeanu	Marin Simion		50	11	III	
5	Jercan Adrian	Scoala nr 1 Rm Sarat	Roșu Valerica		30	9	MENTIUNE	
6	SERBAN RADU	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela		30	9	MENTIUNE	
7	Toea Valentin	Sc. Nr.2 Rm.Sarat	Cristea Mirela		30	9	MENTIUNE	
8	NECULAE MARIAN	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela			8		
9	Gheorghe Laura – Elena	Sc.V. Cristoforeanu	Marin Simion			7		
10	Măcsinoiu Venera Elena	Sc.V. Cristoforeanu	Marin Simion			7		
11	MOLDOVEANU NICOLETA	Sc. V. Cristoforeanu	Miconi Elena			7		
12	BADIU ALEXANDRA	Sc. V. Cristoforeanu	Miconi Elena			4		
18	Nacu Catalin	Scoala nr 1 Rm Sarat	Roșu Valerica			4		
19	Popovici Valentin	Sc.V. Cristoforeanu	Marin Simion			4		
20	Sava Teodor	Sc.V. Cristoforeanu	Marin Simion			4		
21	DRAGHIA ANDREI	Sc. V. Cristoforeanu	Cristea Mirela			ABSENT		
22	Francu Eduard	Scoala nr 1 Rm Sarat	Roșu Valerica			ABSENT		
23	FRATILA SERGIU	Scoala nr 1 Rm Sarat	Apostol Marieana			ABSENT		

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a IX-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	Albina Oana	CNAV	Lazarescu Dragos		100	9,5	I	
12	Sandu Andrei	CNAV	Lazarescu Dragos		80	8,5	II	
11	Ralea Catalina Diana	CNAV	Lazarescu Dragos		50	7,5	III	
17	Vasile Dragos Mitrut	CNAV	Lazarescu Dragos		50	7,5	III	
9	Negoita Andreea	CNAV	Lazarescu Dragos		30	7	mentiune	
3	Corcodel Florina Denisa	CNAV	Lazarescu Dragos			6		
7	Iuga Bogdan Andrei	CNAV	Lazarescu Dragos			6		
14	Stoica Gabriel	CNAV	Lazarescu Dragos			6		
2	Avram Mirela	CNAV	Lazarescu Dragos			5		
5	Ilie Florentin Ionut	CNAV	Lazarescu Dragos			5		
10	Popescu Mărioara Mădălina	Liceul Stefan cel Mare	Țâțan Ovidiu			5		
13	Stoica Andreea	CNAV	Lazarescu Dragos			5		
16	Vasilache Cosmin	CNAV	Lazarescu Dragos			4,5		
6	Ilie-Cristudor Elena Lăcrămioara	Liceul Stefan cel Mare	Țâțan Ovidiu			3,5		
15	Ursescu Marian Alexandru	Liceul Stefan cel Mare	Țâțan Ovidiu			3		
18	Vlad Mihai Ionuț	Liceul Stefan cel Mare	Țâțan Ovidiu			3		
20	Aldea Gabriel Cristian	CNAV				2		
4	Costianu Nicolae Alexandru	Liceul Stefan cel Mare	Țâțan Ovidiu			abs		
8	Lungu Ioana	CNAV	Lazarescu Dragos			abs		
19	Vrămuleț Adrian	CN.V.Alecsandri, Galați	Grigore Mirela			abs		

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a X-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	Neagu Robert	CNBPH Buzau	Enescu Bogdan		100	21	I	
2	Nuțu Bogdan	CNBPH Buzau	Enescu Bogdan		80	12	II	
3	Troscot Silviu	CNAV	Ambrinoc Costica		50	8	III	
4	Iordache Andrei	CNBPH Buzau	Enescu Bogdan		50	7	III	
5	Matache Dragos	CNAV	Neagu Mihai			6		
6	Savastre Stefan	CNAV	Neagu Mihai			6		
7	Anghel Maria	CNAV	Neagu Mihai			5		
8	Lentoiu Ionut	CNAV	Ambrinoc Costica			5		
9	Stanciu Cristian	CNAV	Ambrinoc Costica			5		
10	Tudor Cristian	CNAV	Neagu Mihai			5		
11	Vlad Andreea	Liceul Stefan cel Mare	Tănase Georgeta			5		
12	Sandu Alexandra	CNAV	Neagu Mihai			4		
13	Sarbu Claudiu	CNAV	Neagu Mihai			4		
14	Suflea Eduard	CNAV	Ambrinoc Costica			4		
15	Balaceanu Andra	CNAV	Neagu Mihai			3		
16	Coman Denisa	CNAV	Neagu Mihai			3		
17	Enescu Teodora	CNAV	Neagu Mihai			3		
18	Nacu Miruna	CNAV	Neagu Mihai			3		
19	Tudorache Alina	Liceul Stefan cel Mare	Tănase Georgeta			3		
20	Chintoiu Marinela	Liceul Stefan cel Mare	Tănase Georgeta			2		
21	Hotescu Astrid	CNAV	Neagu Mihai			2		
22	Radu Andruta	CNAV	Ambrinoc Costica			2		
23	Albi Catalin	Liceul Stefan cel Mare	Tănase Georgeta			abs		

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a XI-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	Dibu Cristian	CNAV	Ambrinoc Costica		100	12	I	
2	Soare Alina	CNAV	Ambrinoc Costica		80	11	II	
3	Lefter Ramona Georgiana	CNAV	Ambrinoc Costica		50	9	III	
4	Paraipan Liliana-Alexandra	CNAV	Ambrinoc Costica		50	9	III	
5	Chiorpec Ioan Alexandru	CNAV	Ambrinoc Costica		30	8	Mențiune	
6	Juganaru Elena	CNAV	Ambrinoc Costica		30	8	Mențiune	
7	Plestiu Mihnea Rares	CNAV	Ambrinoc Costica		30	8	Mențiune	
8	Stanciu Gabriela -Madalina	CNAV	Ambrinoc Costica			7		
9	Anghel Alexandru	CNAV	Neagu Mihai			5		
10	Plestiu Mihaela	CNAV	Ambrinoc Costica			5		
11	Comanescu Alexandru	CNAV	Ambrinoc Costica			4		
12	Comanescu Robert	CNAV	Neagu Mihai			3		
13	Gazi Mihai Andrei	CNAV	Neagu Mihai			3		
14	Iaru Manea	CNAV	Neagu Mihai			ABSENT		

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

ATCE Speranta Ramniceana
SOCIETATEA DE MATEMATICA
Proiect: RM. SARAT SPATIUL EUROPEAN AL VOLUNTARULUI
ACTIVITATEA: CONCURS DE MATEMATICA "SPERANTE RAMNICENE"

BORDEROU PREMIERE

Clasa a XII-a

nr crt	Nume si prenume	Scoala	Profesor	CI/CNP	Suma	Punctaj	Premiu	Semnătura
1	Dragan Relu	CNBPH	Bogdan Enescu		100	18,00	I	
2	Perju Lucian	CNAV	Neagu Mihai		80	14,00	II	
3	Ardeleanu Andrei	CNAV	Neagu Mihai		50	10,00	III	
4	Chirciu Andrei	CNAV	Neagu Mihai		50	10,00	III	
5	Ciocirlan Marina	CNAV	Neagu Mihai		30	9,00	Mențiune	
6	Jugaru Bianca	CNAV	Neagu Mihai		30	8,50	Mențiune	
7	Panait Cosmin	CNAV	Neagu Mihai		30	8,50	Mențiune	
8	Brătilă Raluca Ioana	CNAV	Neagu Mihai			8,00		
9	Davidescu Ana-Maria	CNAV	Neagu Mihai			8,00		
10	Iordache Diana	CNAV	Neagu Mihai			8,00		
11	Musat Ramona	CNAV	Neagu Mihai			8,00		
12	Negoias Alexandra	CNAV	Ambrinoc Costica			8,00		
13	Smochina Codrut	CNAV	Neagu Mihai			7,00		
14	Coman Ana	Liceul Stefan cel Mare	Trandafir Elena			6,00		
15	Neculaiasa Anca	Liceul Stefan cel Mare	Trandafir Elena			4,00		
16	Robe Raluca	Liceul Stefan cel Mare	Trandafir Elena			4,00		
17	Coserea Valentin	CNAV	Ambrinoc Costica			3,00		
18	Cretu Ana-Maria Laura	CNAV	Ambrinoc Costica			2,50		
19	Gagiu Razvan	CNAV	Ambrinoc Costica			2,00		
20	Ion Madalina	CNAV	Ambrinoc Costica			1,00		
21	Paraipan Alina	CNAV	Ambrinoc Costica			1,00		
22	Feraru Angela	CNAV	Neagu Mihai			ABSENT		
23	Fratila Raluca	CNAV	Neagu Mihai			ABSENT		

Președinte,
Prof. Costică Ambrinoc

Secretar,
prof. Ovidiu Țâțan

Soluții.

1) Avem: $\overline{abcd}$, $c+d=7 \Rightarrow$ $c=0$ $d=7$ sau $d=7$ $c=0$, $c=2$ $d=5$ sau $c=5$ $d=2$

$c=1$ $d=6$ sau $c=6$ $d=1$, $c=3$ $d=4$ sau $c=4$ $d=3$

Numerele sunt de forma $\overline{ab07}$, $\overline{ab70}$, $\overline{ab16}$, $\overline{ab61}$, $\overline{ab52}$, $\overline{ab25}$, $\overline{ab34}$, $\overline{ab43}$. (3 puncte)

Pt oarece $a \in \{1,2,\dots 9\}$, $b \in \{0,1,2\dots 9\}$

$\Rightarrow$ că numărul de perechi (a,b) este $9 \cdot 10 = 90$ (3 puncte)

În total avem $8 \cdot 90 = 720$ numere 1 punct.

CLASA a IV-a

PROBLEMA 2

ENUNȚ: $\{4 \times [(13 \times a - 36) : 2 + 20] - 310\} : 2 = 5$

SOLUȚIE:

$\{4 \times [(13 \times a - 36) : 2 + 20] - 310\} = 10$ — 1 punct

$4 \times [(13 \times a - 36) : 2 + 20] = 320$ — 1 punct

$(13 \times a - 36) : 2 + 20 = 80$ — 1 punct

$(13 \times a - 36) : 2 = 60$ — 1 punct

$13 \times a - 36 = 120$ — 1 punct

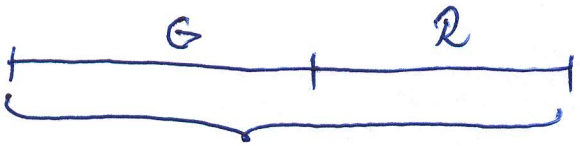
$13 \times a = 156$ — 1 punct

$a = 12$

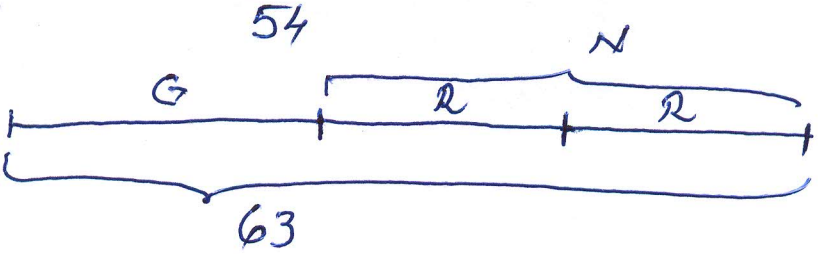
În concluzie, Ionel are vârsta mai mare. — 1 punct.

PROBLEMA 3

(1p)



(1p)



$\Rightarrow$

(1p) $\Rightarrow$ $R = 63 - 54 = 9$

(1p) $N = 2 \cdot 9 = 18$

(1p) $G = 54 - 9 = 45$

Numărul minim de bile ce trebuie extras pentru a fi sigur că avem o bilă galbenă este:

$9 + 18 + 1 = 28.$ (2p)

Problemă propusă pentru clasa a V-a

Arătaţi că numerele $a = \underbrace{\overline{4444....444}}_{555 cifre}$ şi $b = \underbrace{\overline{5555....555}}_{444 cifre}$ nu sunt pătrate perfecte.

Marin Simion, prof., Rm. Sărat

Soluţie

Pentru fiecare număr putem calcula suma cifrelor. Pentru "a" obţinem : $4 \cdot 555 = 2220$. Pentru "b" obţinem: $5 \cdot 444 = 2220$. Numărul 2220 este divizibil cu 3 dar nu este divizibil cu 9. Deoarece suma cifrelor acestor numere se divide cu 3 dar nu se divide cu 9, rezultă că fiecare număr se divide cu 3 dar nu se divide cu 9, deci nu pot fi pătrate perfecte.

Problemă pentru clasa a V-a

(2)

Există numere $\overline{abcd}$, cu proprietatea că $\overline{abcd}+\overline{bcd}+\overline{cd}+d=2014$?

Prof. Constantin APOSTOL
Rm. Sărat

Soluţie :

Adunând unităţile, adică, $d+d+d+d$, trebuie să obţinem un număr care se termină cu 4. Avem următoarele cazuri :

I) $d=1$; adunând zecile, adică, $c+c+c$, trebuie să obţinem un număr care se termină cu 1. Rezultă că $c=7$ şi avem suma zecilor egală cu 21, adică două sute plus o zece ; adunând sutele, adică, $b+b+2$, trebuie să obţinem un număr care se termină cu 0 . Rezultă că avem cazurile : 3p

a) $b=4$; astfel vom avea $4+4+2=10$, deci, scriem 0 şi vom avea $a+1=2$, deci $a=1$. Astfel, am obţinut numărul 1471 . 1p

b) $b=9$; astfel vom avea $9+9+2=20$, deci, scriem 0 şi vom avea $a+2=2$, deci $a=0$. Acest caz nu poate avea loc . 1p

II) $d=6$; avem, deci, $6+6+6+6=24$; scriem 4 şi adunăm zecile : $c+c+c+2$, care tebuie să dea un număr care să se termine cu 1, deci, $c=3$ şi avem $3+3+3+2=11$. Scriem 1 şi adunăm sutele : $b+b+1$, care trebuie să dea un număr care să se termine cu 0 . Acest caz nu poate avea loc . 2p

În concluzie, precizăm că există numărul 1471, pentru care avem : $1471+471+71+1=2014$. 1p

(3) Ana și Barbu desenează pe câte o foaie de hârtie grupuri de stelute. Ana desenează o steluță, apoi trei stelute, apoi 5 stelute și așa mai departe, de fiecare dată un număr impar. Barbu desenează două stelute, apoi 4 stelute, apoi 6 stelute și așa mai departe, de fiecare dată un număr par. Arătați că, indiferent de momentul la care se vor opri din desenat cei doi copii, numărul total de stelute desenate de Ana nu poate fi egal cu numărul total de stelute desenate de Barbu.

***

GM 3/2013

E: 14465

Rezolvare:

Ana și Barbu se opresc din desenat.

Numărul total de stelute desenate de Ana este:

$1+2+3+\ldots+(2n-1)=n^2$ 2p

Numărul total de stelute desenate de Barbu este:

$2+4+6+\ldots+2m=2(1+2+3+\ldots+m)=m(m+1)$, 2p

Dacă Ana și Barbu au desenat același număr de stelute rezultă că: $m(m+1)=n^2$ 1p

Deoarece numerele m și $m+1$ sunt prime între ele, amândouă trebuie să fie pătrate perfecte! 1p

Deoarece nu există pătrate perfecte consecutive în afară de 0 și 1 numerele de stelute desenate de cei doi copii nu pot fi egale. 1p

Problemă propusă pentru clasa a VI-a

Determinaţi proporţiile în care unul dintre mezi este 257,5 iar ceilalţi termeni sunt numere prime.

Marin Simion,prof., Rm. Sărat

Soluţie

Conform enunţului proporţia este de forma $\frac{\quad}{257,5} = - sau - = \frac{257,5}{\quad}$. Ceilalţi termeni sunt numere prime a,b,c.

1) Putem lua $\frac{a}{257,5} = \frac{b}{c} \Rightarrow a \cdot c = 257,5 \cdot b$, conform proprietăţii fundamentale a proporţiilor. Cum a,c$\in \mathbb{N}$ şi $257,5 \cdot b \in \mathbb{N}$; dar b este număr prim ; rezultă b = 2 deoarece 2 este singurul număr prim par (257,5 înmulţit cu un număr impar nu poate fi număr natural) $257,5 \cdot 2 = 515$ iar $515 = 5 \cdot 103$ rezultă a = 5 şi c = 103 sau a = 103 şi c =5.Obţinem proporţiile: $\frac{5}{257,5} = \frac{2}{3}$ şi $\frac{103}{257,5} = \frac{2}{5}$ (1p) (1p) (2p) (2p)

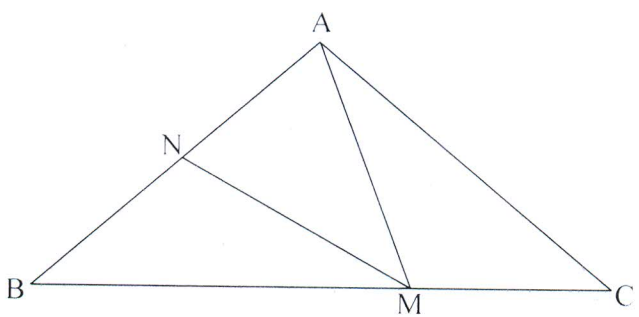
2) Cu aceleaşi numere mai putem obţine proporţiile: $\frac{5}{2} = \frac{257,5}{103}$ şi $\frac{103}{2} = \frac{257,5}{5}$. (1p)

Problemă pentru clasa a VI-a

În triunghiul ABC, cu $(AB) \equiv (AC)$ și $m(\hat{A}) = 100^0$, considerăm punctele M pe (BC) și N pe (AB), astfel încât, $(BM) \equiv (BA)$ și $(BN) \equiv (CM)$. Determinați $m(\hat{BNM})$.

Prof. Constantin APOSTOL
Rm. Sărat

Soluție :



(1p)

Din datele problemei, rezultă că $m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 40^0$; în plus, deducem că $\Delta CMA \equiv \Delta BNM$, având $(CM) \equiv (BN)$ și $(AC) \equiv (BM) \equiv (AB)$, realizându-se cazul LUL. $\Rightarrow (AM) \equiv (MN)$; deci, 2p

ΔAMN este isoscel cu vârful M. Dar, $m(\hat{B}) = 40^0$, $\Rightarrow m(\hat{MAN}) = m(\hat{ANM}) = \frac{180^0 - 40^0}{2} = 70^0$. 1p 2p

Așadar, $m(\hat{BNM}) = 180^0 - 70^0 = 110^0$. 1p

Problema 3

Locuitorii unei comune, formată din două sate, sunt chemați la vot. Procentul de participare la vot al celor două aşezări este de 60% respectiv 75%. Să se afle cât la sută reprezintă locuitorii satului cu populația mai mică din locuitorii satului cu populația mai mare, dacă procentul de participare la nivelul comunei este de 69%.

E: 14439 , G. M.1 / 2013, Cosmin Manea şi Petrică Dragoş,Piteşti

Solutie

Cosmin Manea şi Petrică Dragoş, Piteşti

Soluţie. Fie a numărul de locuitori dintr-o aşezare (A) şi b numărul de locuitori din cealaltă aşezare (B). Din A participă la vot $\frac{60a}{100}$ locuitori, iar din B participă $\frac{75b}{100}$ locuitori. În total participă $\frac{60a+75b}{100}$ locuitori. 2p Procentul de participare, la nivelul comunei este 69%, înseamnă că $\frac{69}{100}\cdot(a+b)=\frac{60a+75b}{100}$, de unde deducem că $b=\frac{3a}{2}$. 3p Aşadar, în aşezarea B sunt mai mulţi locuitori. Fie x procentul cerut. Atunci, din $\frac{x}{100}\cdot b=a$ şi $b=\frac{3a}{2}$ găsim $x=66,(6)$. 2p

Clasa a VII-a **ei mei mic**

Să se determine $a \in \mathbb{N}$ astfel încât numărul:

$A = 2014^x(2014^x+1)(2014^x+2)(2014^x+3)+a$ să fie pătrat ~~perfect~~ oricare ar fi $x \in \mathbb{N}$

Constantin Rusu

Soluție Notăm: $2014^x = y$ (1 punct) și numărul A se scrie succesiv:

$A = y(y+1)(y+2)(y+3)+a \Leftrightarrow (y^2+3y)(y^2+3y+2)+a =$ (2 puncte)

$(y^2+3y)^2+2(y^2+3y)+1+a-1 = (y^2+3y+1)+a-1$ (3 puncte)

Pentru ca numărul A să fie pătrat perfect trebuie ca $a-1=0 \Leftrightarrow a=1$. (1 punct)

Z

a VII-a

Determinați numerele $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că:

$$\sqrt{\underbrace{577\ldots76}_{n \text{ cifre}}} \in \mathbb{N}.$$

Rezolvare:

$n = 1 \Rightarrow 576 = 4 \cdot 144 = 4 \cdot 4 \cdot 36 \Rightarrow \sqrt{576} = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 24$. 1 punct

$n = 2 \Rightarrow 5776 = 4 \cdot 1444 = 4 \cdot 361 \Rightarrow \sqrt{5776} = 4 \cdot 19 = 76$ 1 punct

$n \geq 3$: $\underbrace{577\ldots76}_{n \text{ cifre}} = 4 \cdot \underbrace{1444\ldots4}_{(n+1) \text{ cifre}} =$ 1 punct

$= 4 \cdot 361\underbrace{1\ldots1}_{(n-1) \text{ cifre}} =$ 1 punct

$= 4\left(361\underbrace{1\ldots1}_{(n-3) \text{ cifre}}08 + 3\right) = 4 \cdot (\underbrace{M_4}_{\text{nr e pătrat perfect}} + 3)$ 2 puncte

Răspuns final: $n \in \{1, 2\}$. 1 punct

Problema 3

Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră punctele D şi E astfel încât $BD = DE = EC$. Mediana $BB'(B' \in AC)$ intersectează pe AD în M, iar mediana $CC'(C' \in AB)$, intersectează pe AE în N. Arătați că:

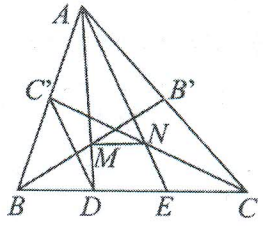
a) $BMNC$ este trapez;

b) $MN = \frac{1}{4} BC$

E: 14369 , G.M.6-7-8 / 2012, Luca Tuță, Buzău

Solutie

Soluţie. a) DC' linie mijlocie în $\triangle ABE$ implică $DC' = \frac{AE}{2}$; NE linie mijlocie în $\triangle C'DC'$ implică $NE = \frac{C'D}{2}$ şi având în vedere relaţia anterioară $NE = \frac{AE}{4}$ sau $\frac{NE}{AE} = \frac{1}{4}$, (1). Analog se obţine $\frac{MD}{AD} = \frac{1}{4}$, (2). Din relaţiile (1) şi (2), cu teorema reciprocă a teoremei lui Thales în $\triangle ADE$, obţinem $MN \parallel DE$, de unde $BMNC$ este trapez.



b) Din $MN \| DE$, cu teorema fundamentală a asemănării, avem $\triangle AMN \sim \triangle ADE$, de unde $\frac{MN}{DE} = \frac{AN}{AE} = \frac{3}{4}$. Cum $DE = \frac{BC}{3}$ rezultă $MN = \frac{1}{4} \cdot BC$.

3 puncte

1 punct

3 puncte

CLASA a VIII-a

Fie $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ sirul primelor n numere naturale impare. Să se arate că nu există printre acestea un număr k astfel încât suma numerelor mai mici sau egale cu k să fie egală cu suma numerelor mai mari decât k.

Soluție: Fie $x = 2m-1$, $m < n$, $m, n \in \mathbb{N}^*$

Nr. sunt $1, 3, 5, \dots, 2m-1, 2m+1, 2m+3, \dots, 2n-1$

$S(x \le 2m-1) = 1+3+5+\dots+2m-1 = m^2$ (2 puncte)

$S'(x > 2m-1) = (2m+1)+(2m+3)+\dots+(2n-1) = S(x \le 2m-1)$ (1p)

Dar $S(x \le 2m-1) + S'(x > 2m-1) = 1+3+5+\dots+2n-1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m^2 = n^2 \Rightarrow$ (2 puncte) ($2 \mid n^2 \Rightarrow 2 \mid n$ (F), n = impar)

$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot m = n \Rightarrow \frac{m}{n} = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, (fals) $m, n \in \mathbb{N}^*$

2 puncte

Prof Lăzărescu D

(2) Determinați toate perechile (x,y) de numere întregi astfel încât: $x^2y^2 - x^2 - xy - x - y^2 + y + 2 = 0$.

Soluție.

$x^2y^2 - x^2 - xy - x - y^2 + y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1) - (xy + x - y - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(y^2-1) - (x-1)(y+1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(y+1)\big[(x+1)(y-1) - 1\big] = 0$. 3 puncte

Așadar avem două familii de soluții: $(x,y) = (1,a)$ și $(x,y) = (b,-1)$, unde a și b sunt numere întregi, precum și soluțiile care provin din $(x+1)(y-1) - 1 = 0$. 2p

Soluțiile ecuației $(x+1)(y-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(y-1) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 1 \\ y-1 = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x+1 = -1 \\ y-1 = -1 \end{cases}$

sunt $(x,y) = (0,-2)$ respectiv $(x,y) = (2,0)$.

Prin urmare ecuația are soluțiile :

$(x,y) \in \{(1,a),(b,-1),(0,-2),(2,0)\}$, unde $a \in Z, b \in Z$. 2p

E 14603 GM 1/2014

PROBLEMA 3 CLASA a VIII-a

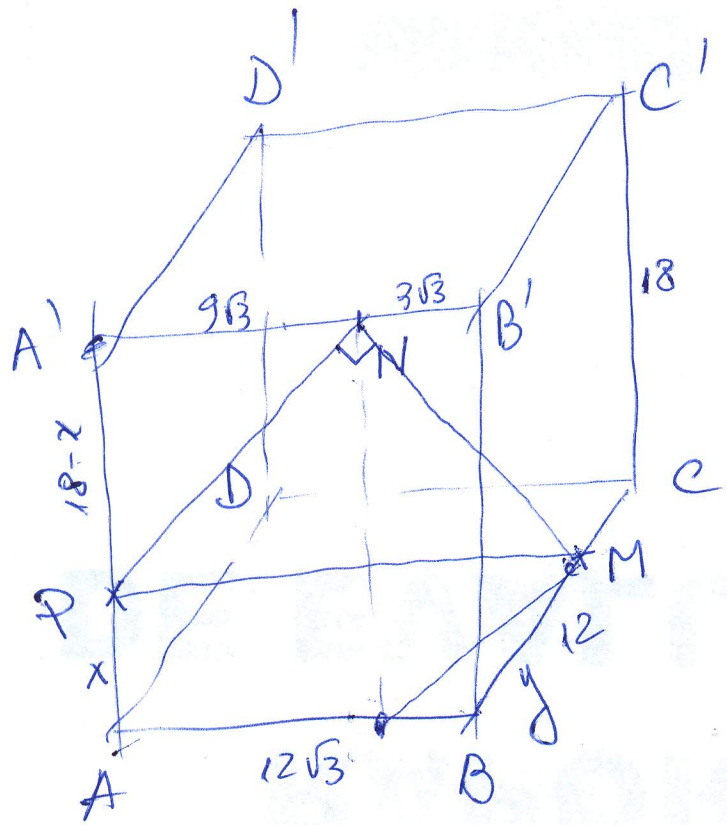
Soluție

$AB = 12\sqrt{3}$

$BC = 12$

$AA' = 18$

$A'N = 3B'N$



$PN^2 = (9\sqrt{3})^2 + (18-x)^2$ (1p)

$NM^2 = 18^2 + y^2 + (3\sqrt{3})^2$ (1p)

$PM^2 = x^2 + y^2 + (12\sqrt{3})^2$ (1p)

$81 \cdot 3 + (18-x)^2 + 18^2 + y^2 + 27 = x^2 + y^2 + (12\sqrt{3})^2$ (1p)

$243 + 18^2 - 36x + x^2 + 18^2 + 27 = x^2 + 144 \cdot 3$

$243 + 324 + 324 + 27 - 432 = 36x$ (2p)

$x = 13,5$ cm (1p)

PROBLEMA 1 — CLASA a IX-a

ENUNȚ: Să se determine funcția $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ știind că:

$$1^2 f(1)+2^2 f(2)+\dots+n^2 f(n)=\frac{n^2(f(n)+1)^2}{4} \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

SOLUȚIE:

Pentru $n=1 \Rightarrow 1\cdot f(1)=\frac{(f(1)+1)^2}{4} \Rightarrow f(1)=1$ — 1 punct

Pentru $n=2 \Rightarrow 1+4f(2)=\frac{4(f(2)+1)^2}{4} \Rightarrow 1+4f(2)=f^2(2)+2f(2)+1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f^2(2)-2f(2)=0 \Rightarrow$

$f(2)=2$ — 1 punct.

Arătăm prin inducție matematică faptul că $f(n)=n \ \forall n\in\mathbb{N}^*$ — 2 puncte

$P(n): f(n)=n \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$

1) $P(1): f(1)=1$ (A) — 1 punct

2) $P(n)\to P(n+1): f(n+1)=n+1$ --- — 2 puncte

Problemă propusă pentru clasa a VIII-a

Arătaţi că dacă, m_a, m_g, m_h şi m_p sunt mediile aritmetică, geometrică, armonică şi pătratică a numerelor 1 şi x, unde $0 < x < 1$ atunci au loc inegalităţile:

i) $m_a + m_g < m_h + m_p$;

ii) $\frac{m_g + m_p}{2} < m_a$.

D.M.Bătineţu-Giurgiu, Bucureşti şi Neculai Stanciu, Buzău

Soluţie.

i) Avem succesiv:

$$m_a + m_g < m_h + m_p \Leftrightarrow \frac{x+1}{2} + \sqrt{x} < \frac{2x}{1+x} + \sqrt{\frac{x^2+1}{2}} \Leftrightarrow \quad 2\text{p}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{(x-1)^2}{2(x+1)} < \sqrt{\frac{x^2+1}{2}} \Leftrightarrow x + 2\sqrt{x}\cdot\frac{(x-1)^2}{2(x+1)} + \frac{(x-1)^4}{4(x+1)^2} < \frac{x^2+1}{2} \Leftrightarrow \quad 1\text{p}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+6x+1}{4(x+1)} > \sqrt{x} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-1)^4}{4(x+1)} > 0\text{, ceea ce este adevărat.} \quad 1\text{p}$$

ii) Avem succesiv:

$$\frac{m_g + m_p}{2} < m_a \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2+1}{2}} + \sqrt{x} < 1 + x \Leftrightarrow \quad 1\text{p}$$

$$\Leftrightarrow x + 1 - \sqrt{x} > \sqrt{\frac{x^2+1}{2}} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 1 - 2\sqrt{x}(x+1) > \frac{x^2+1}{2} \Leftrightarrow \quad 1\text{p}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x\sqrt{x} + 6x - 4\sqrt{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x}-1)^4 > 0\text{, ceea ce este adevărat.} \quad 1\text{p}$$

Problemă propusă pentru clasa a IX-a

Enunț:

Se dă patrulaterul convex $ABCD$ într-un sistem ortogonal de axe cu originea în O. Considerăm poligonul convex $A_1B_1C_1D_1$ ale cărui vârfuri au vectorii de pozitie egali respectiv cu $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ şi $\overrightarrow{DA}$.

Să se afle raportul ariilor patrulaterelor $A_1B_1C_1D_1$ şi $ABCD$

Prof. Costică Ambrinoc, Râmnicu Sărat

Soluție:

Avem că triunghiurile ABC şi OA_1B_1 au $AB = OA_1$ şi $BC = OB_1$ iar unghiurile $\widehat{ABC}$ şi $\widehat{A_1OB_1}$ sunt suplementare deci cele doua triunghiuri au aceeasi arie! Analog triunghiurile BCD şi B_1OC_1, CDA şi C_1OD_1, DAB şi D_1OA_1 au aceeaşi arie! Adunând aceste arii rezulta că $aria(A_1B_1C_1D_1) = 2aria(ABCD)$

Deci raportul cerut este 2.

Problemă propusă pentru clasa a X-a

Enunț:

Să se rezolve ecuaţia:

$$\sqrt{2-\sqrt{2+x}}=x$$

Prof.Costică Ambrinoc, Râmnicu Sărat

Soluție:

Din condiţiile de existenţă rezultă:

$2+x\geq 0$ şi $2\geq\sqrt{2+x}$ de unde $x\in[-2,2]$

Din egalitatea din enunţ avem $x\geq 0$ deci $x\in[0,2]$ 1p

Putem pune deci $x=2\cos t$, cu $t\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 2p

Atunci $2+x=2+2\cos t=4cos^2\frac{t}{2}$ şi $2-\sqrt{2+x}=2-2cos\frac{t}{2}=4sin^2\frac{t}{4}$ 1p

Egalitatea din enunţ devine $sin\frac{t}{4}=cost\Leftrightarrow cost-cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{4}\right)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -2sin\frac{3t+2\pi}{8}sin\frac{5t-2\pi}{8}=0$$ 1p

Din $t\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ rezultă $\frac{3t+2\pi}{8}\epsilon\left[\frac{\pi}{4},\frac{7\pi}{16}\right]$ şi ecuaţia $sin\frac{3t+2\pi}{8}=0$ nu are soluţie. 1p

Din $t\epsilon\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ rezultă $\frac{5t-2\pi}{8}\epsilon\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{16}\right]$ şi ecuaţia $sin\frac{5t-2\pi}{8}=0$ are soluţia $t=\frac{2\pi}{5}$ 1p

Ecuaţia din enunţ are singura soluţie $x=2cos\frac{2\pi}{5}$ 1p

X Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ distincte două câte două și

$|z_1| = |z_2| = |z_3|$. Dacă $z_1|z_2 - z_3| + z_2|z_3 - z_1| + z_3|z_1 - z_2| = 0$ (R_1)

atunci z_1, z_2, z_3 sunt afixele vârfurilor unui triunghi echilateral.

a) ΔABC echilateral $\Rightarrow R_1$ 2p

b) Arătăm $R_1 \Rightarrow \Delta ABC$ echilateral

Rezolvare: $A(z_1)$; $B(z_2)$; $C(z_3)$

$R = |z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0 \Rightarrow z_1, z_2, z_3 \in C(O; R)$. 1p

$z_1|z_2 - z_3| + z_2|z_3 - z_1| + z_3|z_1 - z_2| = 0$

$\Downarrow$

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ 2p

$\Downarrow$

$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0}$

$\Downarrow$

$(a+b+c)\overrightarrow{OI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{OI} = \vec{0} \Rightarrow O = I \Rightarrow \Delta ABC$ - echilateral. 2p

Problemă clasa a X-a

Fie $a, b \in (0,\infty) \setminus \{1\}$, $a+b \neq 1$ și funcțiile:

$f, g : (0,\infty) \to \mathbb{R}$; $f(x) = \log_a x + \log_b x$,

$g(x) = \log_{a+b} x$.

Să se arate că $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (0,\infty)$ dacă și numai dacă $f(a) = g(a)$.

Prelucrare GM 1/2012

Soluție

„$\Rightarrow$" $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (0,\infty) \Rightarrow f(a) = g(a)$

$a \in (0,\infty)$ ——— 1p

„$\Leftarrow$" Dacă $f(a) = g(a)$ atunci

$1 + \log_b a = \log_{a+b} a \Leftrightarrow \frac{\lg a}{\lg a} + \frac{\lg a}{\lg b} = \frac{\lg a}{\lg(a+b)}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\lg a} + \frac{1}{\lg b} = \frac{1}{\lg(a+b)} \Leftrightarrow$ ——— 2p

$\frac{\lg x}{\lg a} + \frac{\lg x}{\lg b} = \frac{\lg x}{\lg(a+b)}$ $\forall x \in (0,\infty)$

——— 2p

$\Leftrightarrow \log_a x + \log_b x = \log_{a+b} x$ $\forall x \in (0,\infty)$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x)$ $\forall x \in (0,\infty)$ ——— 2p

Clasa a XI-a

(2) Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Să se calculeze $\det\left(A^{2011}+B^{2011}\right)$.

b) Dacă $C=A+B$, calculați C^n

REZOLVARE:

a) $A^2-(\mathrm{Tr}A)\cdot A+(\det A)\cdot I_2=O_2 \Rightarrow A^2=3A \Rightarrow$

(1p) $\Rightarrow A^n=3^{n-1}\cdot A$, $\forall n\geq 1$ (inducție)

$B^2-(\mathrm{Tr}B)\cdot B+(\det B)I_2=O_2 \Rightarrow B^2=B \Rightarrow$

(1p) $B^n=B$, $\forall n\geq 1$

$A^{2011}+B^{2011}=\frac{3^{2013}}{\alpha}\cdot A+B=\alpha\cdot A+B=\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A^{2011}+B^{2011}\right)=\begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha-2 \\ 2\alpha+1 & 2\alpha+2 \end{vmatrix}$

(2p) $\Rightarrow \det\left(A^{2011}+B^{2011}\right)=3\alpha=3^{2011}$

b) $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C^2=4C-3I_2$, $C^2=\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 12 & 13 \end{pmatrix}$

$C^n=x_nC+y_nI_2 \Rightarrow C^{n+1}=x_nC^2+y_nC \Rightarrow$

$C^{n+1}=4x_nC-3x_nI_2+y_nC \Rightarrow C^{n+1}=(4x_n+y_n)C-3x_nI_2$

(4p) $\begin{cases} y_{n+1}=-3x_n \\ x_{n+1}=4x_n+y_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_{n+1}=-3x_n \\ x_{n+1}=4x_n-3x_{n-1} \end{cases}$

$x_{n+1}-4x_n+3x_{n-1}=0$, $r^2-4r+3=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=1 \\ r_2=3 \end{cases}$

$x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n$, $n \geq 1$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

$x_1 = 1$; $x_2 = 4$. $\Rightarrow$ $x_n = \frac{3^n - 1}{2}$, $n \geq 1$

$y_n = -3 \cdot x_{n-1} \Rightarrow y_n = \frac{3 - 3^n}{2}$, $\forall n \geq 1$ (1p)

$C^n = x_n \cdot C + y_n \cdot I_2 \Rightarrow C^n = \frac{3^n - 1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \frac{3 - 3^n}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $C^n = \begin{pmatrix} \frac{3 - 3^n}{2} & \frac{1 - 3^n}{2} \\ \frac{3^{n+1} - 3}{3} & \frac{3^{n+1} - 1}{2} \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (1p)

Prof. Lăzărescu D.

Problemă propusă pentru clasa a XI-a

(1)

Enunț:

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ *un șir de numere reale cu* $x_1 = 2$ *și* $\ln\sqrt{x_{n+1}} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}, \forall n \geq 1$. *Să se arate că* $(x_n)_{n\geq 1}$ *este convergent și să se calculeze limita sa.*

Prof. Ovidiu Țâțan, Râmnicu Sărat

Soluție:

Vom arăta prin inducție matematică faptul că șirul este mărginit inferior de 1 și descrescător.

I)Mărginirea

$P(n): x_n > 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$1) P(1): x_1 = 2 > 1 (A)$

$2) P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n+1): x_{n+1} > 1$

$\ln\sqrt{x_{n+1}} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1} > 0 \Rightarrow x_{n+1} > 1 (A)$ (2p)

II)Monotonia

$P(n): x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

$1) P(1): x_2 < x_1 \Rightarrow \ln x_2 = \frac{2-1}{2+1} \Rightarrow x_2 = e^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{e^2} < 2 = x_1 (A)$

$2) P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$P(n+1): x_{n+2} < x_{n+1} \Rightarrow$ (2p)

$\ln\sqrt{x_{n+2}} - \ln\sqrt{x_{n+1}} = \frac{x_{n+1} - 1}{x_{n+1} + 1} - \frac{x_n - 1}{x_n + 1} = \frac{2(x_{n+1} - x_n)}{(x_{n+1} + 1)(x_n + 1)} < 0 \Rightarrow x_{n+2} < x_{n+1} (A)$

Șirul este monoton descrescător și mărginit inferior de către 1, deci convergent. (1p)

Notăm cu $l = \lim_{n\to\infty} x_n$ și trecem la limită în relația de recurență. Obținem ecuația:

$\ln\sqrt{l} = \frac{l-1}{l+1} \Rightarrow l = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1$. (Ecuația are soluția unică 1, soluție ce se obține eventual din studiul funcției $f: [1,\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\sqrt{x} - \frac{x-1}{x+1}$. De altfel, dacă se studia de la început funcția anterioară, rezulta mult mai ușor monotonia șirului.) (2p)

6

25529. *Să se calculeze:* GM 4/2006

a) $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\ln(\sin x)+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)$; b) $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{\dfrac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(\ln x)}$.

$\lim\limits_{x\to 0,\, x>0} e^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{\ln(\sin x)}{e^{\frac{1}{x}}}+1\right]$ (1p)

Sebastian Lesnic, elev, Bucureşti

Soluţie. a) Calculăm $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}$. Cum $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\dfrac{-x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=$ (1p) (2p)

$=-\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{x}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0$, rezultă că $\lim\limits_{x\searrow 0}\dfrac{\ln(\sin x)}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=0$, deci $\lim\limits_{x\searrow 0}\left(\ln(\sin x)+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)=\infty$. (1p) (2p).

a XII - a

(2) Calculati:

$$\int \frac{e^{2x} + \sin x\,(2e^x + 1) + 2e^x + \sin^2 x + \cos x}{e^x + \sin x}\,dx .$$

Ion Rădută

Rezolvare:

$$I = \int \frac{e^{2x} + 2\sin x \cdot e^x + \sin^2 x + e^x + \sin x + e^x + \cos x}{e^x + \sin x}\,dx =$$

$$= \int \left[\frac{(e^x + \sin x)^2}{e^x + \sin x} + \frac{e^x + \sin x}{e^x + \sin x} + \frac{e^x + \cos x}{e^x + \sin x} \right] dx = \quad 2p$$

$$= \int \left(e^x + \sin x + 1 + \frac{(e^x + \sin x)'}{e^x + \sin x} \right) dx = \quad 2p$$

$$= e^x - \cos x + 1 + \ln|e^x + \sin x| + C \quad 1p \quad 2p$$

Clasa a XII-a

(1) Se consideră funcția: $f(x)=\ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x-\frac{1}{x}$

$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

Să se arate că: 1) $x\geq e^{\ln x}$, $\forall x\in(0,+\infty)$

2) dacă funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, dovediți că $F(\sqrt{10}^e)>F(e^{\sqrt{10}})$

Constantin Rusu

Soluție. a) Se consideră funcția $g(x)=x-e^{\ln x}$, $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$

Avem: $g'(x)=1-\frac{e}{x}$, $g'(x)=0\Leftrightarrow x=e$, $g'(x)\leq 0$, $\forall x\in(0,e]$,

$g'(x)\geq 0$ $\forall x\in[e,+\infty)$, $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x)=+\infty$, $g(e)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

$\Rightarrow g(x)\geq 0$, $\forall x>0$. Am obținut concluzia dorită

2 puncte

Din (1) mai avem $x\geq e^{\ln x}\Leftrightarrow x\geq \ln x^e\Leftrightarrow \ln e^x\geq \ln x^e\Leftrightarrow e^x\geq x^e$ $\forall x>0$

Pentru $x=\sqrt{10}$ găsim $e^{\sqrt{10}}\geq\sqrt{10}^e$ 2 puncte

b) Procedând ca la punctul a) se arată că $f(x)<0$ $\forall x>0$

Așadar $F'(x)=f(x)<0$, $\forall x>0\Rightarrow F(x)$ este descrescătoare $\forall x>0$

2 puncte

deci $e^{\sqrt{10}}>\sqrt{10}^e\Rightarrow F(e^{\sqrt{10}})<F(\sqrt{10}^e)$ adică exact tocmai dorit

(1 punct)

Problema 3

Fie p un număr prim iar a un element fixat în corpul $\mathbb{Z}_p$. Să se rezolve în acest corp ecuația $x^p = a$.

Marcel Țena, București.

Soluție

În corpul $\mathbb{Z}_p$ avem $a^p = a$ (mica teoremă Fermat) (1 punct) ①

și $(u-v)^p = u^p - v^p$, (2 puncte) ②

Această rezultă din binomul lui Newton și faptul că $p \mid C_p^k$, pentru $k \neq 0, k \neq p$. (1 punct)

Formula ② merge și pentru $p=2$ căci atunci $-1=1$. (1 punct)

Cu aceste observații ecuația se scrie succesiv:

$$x^p = a \Leftrightarrow x^p - a = 0 \Leftrightarrow x^p - a^p = 0 \Leftrightarrow (x-a)^p = 0$$ (1 punct)

Ultima ecuație are p rădăcini egale cu a sau echivalent are rădăcina a cu ordinul de multiplicitate p. (1 punct).